УДК 519.6

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Акишин Б.А., к.т.н., доцент,
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону
akiboralex@mail.ru
Воронцова В.А., студентка,
Технологический институт (филиал) ДГТУ в г.Азове, Ростовская область
vella.vor@mail.ru

Аннотация. Приводятся примеры использования систем компьютерной математики в процессе решения типовых математических задач. Анализируются особенности интерпретации получаемых результатов.

Ключевые слова: система компьютерной математики, программа Maxima, программа GeoGebra, программа MathCAD, предел функции, неопределенный интеграл.

FEATURES OF USING THE SYSTEMS OF THE COMPUTER MATHEMATICS IN STUDYING OF THE MATHEMATICAL SUBJECTS IN TECHNICAL HIGHER EDUCATION

Akishin B. Ph.D., Associate Professor,
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia
akiboralex@mail.ru
Vorontsova V., student of Technological Institute (branch) of Don State Technical University,
Azov, Russia
vella.vor@mail.ru

Abstract. Examples are given of using the systems of the computer mathematics in the process of solving standard mathematical tasks. Features of the interpretation of the obtained results are analyzed.

Keywords: system of computer algebra, program Maxima, GeoGebra, MathCAD, the limit of a function, indefinite integral.

Современный подход к изучению математики в школе и вузе состоит в активном использовании в процессе обучения систем компьютерной математики (СКМ). Это позволяет более эффективно усваивать и закреплять знания, полученные на лекционных и практических занятиях, интенсифицировать процессы самообучения и контроля при выполнение самостоятельных заданий, использовать СКМ при подготовке курсовых и дипломных проектов по другим дисциплинам и т.п.

Какие СКМ можно рекомендовать для этих целей? Они должны быть:

1) достаточно универсальными - с охватом многих разделов школьной и вузовской математики;
2) с хорошими возможностями двумерной и трехмерной научной графики;
3) доступными – как в плане наличия свободной лицензии, так и в возможностях их инсталляции на различных операционных системах и типах компьютеров, включая планшетники и смартфоны;
4) «живыми» - периодически обновляющимися и поддерживаемыми разработчиками;
5) иметь встроенный язык алгоритмического программирования, позволяющий эффективно сочетать использование библиотек встроенных функций с авторскими дополнениями.

У таких систем имеются, как правило, активные форумы в Интернете, где можно задать любой вопрос и получить на него квалифицированный ответ. СКМ, во многом отвечающими вышеперечисленным условиям, являются программы *Maxima* и *GeoGebra,* позволяющие осуществлять достаточно сложные численные и аналитические расчеты [1 - 3]. Помимо них, в зависимости от учебных планов конкретных специальностей, в Донском государственном техническом университете при изучении математических дисциплин используются также библиотеки Python и лицензионные пакеты Matlab и MathCAD. При этом, работа с СКМ осуществляется как аудиторно в рамках практических занятий по математике или лабораторных занятий по информационно - коммуникационным технологиям, так и в процессе самообучения и контроля при выполнение самостоятельных заданий.

Заметим, что ответы, получаемые студентом на бумаге, зачастую отличаются от ответов, выдаваемых СКМ. В таких случаях студент должен провести углубленный анализ, разобраться в причинах несоответствия и довести решение до конца. По курсу высшей математики для студентов ряда технических специальностей ДГТУ в 2017-18 учебном году наблюдалась следующая статистика (средняя по СКМ и группам специальностей):

- ответы полностью совпадают 45%
- студент сделал ошибку в расчетах 20%
- ответы не противоречат друг другу и их можно привести в соответствие 22%
- СКМ не может решить пример или выдает ответ в непонятном для студента виде, например, выраженный через неэлементарные функции 10%
- ошибка заложена в СКМ 3%

Приведем несколько примеров из практики аналитических (символьных) решений задач математического анализа:

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

Первоначально достаточно много студентов решают этот пример неправильно, как:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

забыв при извлечении квадратного корня поставить знак модуля.

Maxima же выдает сообщение, что обычный двусторонний предел не существует (**und** – неопределен):

(%i15) f(x):=x/sqrt(1-cos(x));

(%o15) $f(x):=\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

(%i16) limit(f(x), x, 0);

(%o16) und

Вычислив односторонние пределы и отобразив функцию $f(x)$ на графике, студент убеждается, что в точке $x=0$ функция терпит разрыв 1-го рода со скачком $2\sqrt{2}$, т.е. обычный предел, действительно, не существует.

(%i8) limit(f(x), x, 0, minus);

(%o8) $-\sqrt{2}$

(%i9) limit(f(x), x, 0, plus);

(%o9) $\sqrt{2}$

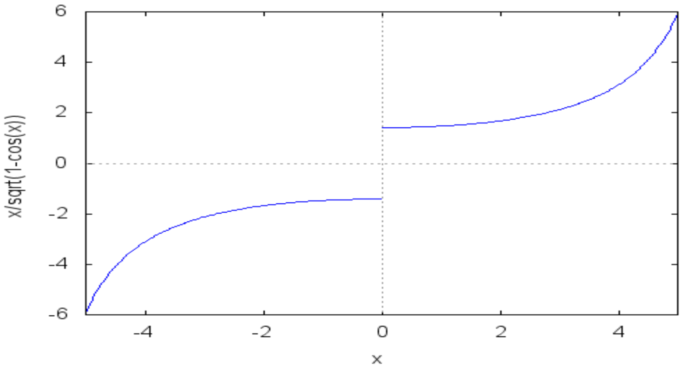

Рис.1 График функции с разрывом

Известно [1], что если встроенная функция **limit** не может вычислить предел аналитического выражения непосредственно, то она по умолчанию использует правило Лопиталя. Кроме того, в диалоговом окне можно установить флажок «Ряд Тейлора», при котором все введенные параметры автоматически передаются функции **tlimit**, вычисляющей предел с использованием разложения $f(x)$ в степенной ряд (ряд Тейлора). Однако, использование этого приема для рассматриваемого примера приводит к неправильному результату:

(%i10) tlimit(f(x), x, 0);

(%o10) $\sqrt{2}$

Последовательности решения примера 1 в СКМ GeoGebra и MathCAD аналогичны:
в GeoGebra :

7 Предел $\left(\frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}, x, 0\right)$

→ ?

8 НижнийПредел $\left(\frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}, x, 0\right)$

→ $-\sqrt{2}$

9 ВерхнийПредел $\left(\frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}, x, 0\right)$

→ $\sqrt{2}$

и в MathCAD :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}} \to \text{undefined}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}} \to -\sqrt{2} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}} \to \sqrt{2}$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл от иррациональной дроби

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx$$

Большинство студентов умеет находить первообразные для подобных интегралов «группы четырех»:

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}dx = \frac{3}{5}\cdot\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{8\sqrt{5}}{25}\cdot\ln\left|x-\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{5x^2-2x+1}}{\sqrt{5}}\right|+C$$

Программа Maxima выдает ответ в несколько иной форме:

```
(%i1) ratsimp(integrate((3*x+1)/sqrt(5*x^2-2*x+1),x));
```

$$\text{(\%o1)}\quad \frac{8\sqrt{5}\,\operatorname{asinh}\left(\frac{5x-1}{2}\right)+15\sqrt{5x^2-2x+1}}{25}$$

используя в ответе обратную гиперболическую функцию ареа-синус. Если студент ранее не встречал этой функции, то он должен обратиться к справочнику по математике, который наверняка содержит определение функции ареа-синус и известную формулу:

$$a\sinh\,(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Совершив преобразования по этой формуле студент выяснит, что его ответ совпадает с компьютерным с точностью до произвольной постоянной.

Кстати, результат интегрирования программы Maxima может быть проверен с ее же помощью путем дифференцирования (в качестве упрощающей была подобрана функция **factor)**:

```
(%i2) factor(diff(%,x,1));
```

$$\text{(\%o2)}\quad \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$$

Программа GeoGebra выдает ответ тоже в иной форме, чем ответ студента:

16

$$\frac{3x+1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$$

Интеграл: $-\frac{1}{5}\cdot 8\cdot\frac{\ln\left(\sqrt{5}\left(-\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2-2x+1}\right)+1\right)}{\sqrt{5}}+\frac{3}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+c_2$

17

f(x) := Производная ($16)

$\rightarrow f(x) := \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$

Это связано с тем, что в GeoGebra заложена иная формула табличного интеграла, отличающаяся от общепринятой у нас:

1

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$$

Интеграл: $-\ln\left(\left|-x+\sqrt{x^2+k}\right|\right)+c_1$

Сравнивая свой ответ с ответом GeoGebra, студент легко может доказать, что ответы различаются на постоянную величину. Обратим внимание, что в отличие от других СКМ, программа GeoGebra включает в свой ответ произвольную постоянную c_1.

Отметим также, что с задачей аналитического вычисления интегралов многие СКМ, даже коммерческие, не всегда справляются, например, MathCAD-15 окончательного ответа на решение примера 2 не дает:

$$\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx \rightarrow \int \frac{3\cdot x}{\sqrt{5\cdot x^2-2\cdot x+1}}\,dx + \frac{\sqrt{5}\cdot \ln\left[\sqrt{5\cdot x^2-2\cdot x+1}+\frac{\sqrt{5}\cdot(5\cdot x-1)}{5}\right]}{5}$$

Вывод. Системы компьютерной математики весьма полезны при изучении вузовской математики. В статье приведены лишь некоторые примеры эвристического подхода к изучению математики в вузе с использованием СКМ . Опыт показывает, что в процессе общения с компьютером студент не только приобретает навыки работы с программой, которые пригодятся ему в дальнейшем, но и углубляет свои знания по математике, что зачастую приводит к освоению новых математических методов, заложенных в современные программы. Преподаватель же увеличивает эффективность процесса самообучения и направляет его по правильному руслу.

Литература

1. Акишин Б.А. Решение математических задач с помощью пакета Maxima. Учеб. пособие / Б.А. Акишин. Л.В. Черкесова., А.В. Галабурдин. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2015. – 100 с.

2. Акишин Б.А. Применение пакета Maxima при решении прикладных инженерных и экономических задач. Учеб. пособие / Б.А. Акишин, Н.Ю. Богданова, А.В. Галабурдин. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2016. – 84 с.

3. Акишин Б.А. Решение типовых математических задач с помощью программы GeoGebra / Б.А. Акишин Б.А., В.А. Воронцова // Современные тенденции развития и перспективы внедрения инновационных технологий в машиностроении, образовании и экономике: Материалы Международной научно - практической конференции молодых ученых. – Технологический ин-т (филиал) ДГТУ в г. Азове, 2017. – С. 27-33.